ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α΄ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

1) Αν $\alpha = 4\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, να αποδειχθεί ότι $4/(\alpha^3 + 2\alpha + 1)$.

2) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων είναι πολλαπλάσιο του 8.

3) Αν $x, y \in \mathbb{Z}$ και $2 \not| \, xy$, να αποδείξετε ότι:

i) x, y περιττοί ii) $2/(x^2 + y^2)$

iii) $4 \not| \, (x^2 + y^2)$

4) Αν δύο ακέραιοι α και β διαιρούμενοι με γ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, να αποδείξετε ότι η διαφορά $\alpha - \beta$ διαιρείται ακριβώς από τον γ.

5) Αν $7/(\alpha + 3)$ και $7/(38 - \beta)$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, να αποδειχθεί ότι $7/(\alpha + \beta)$.

6) Έστω α ακέραιος και β αρνητικός ακέραιος τέτοιος, ώστε $\beta/(2\alpha + 1)$ και $\beta/(3\alpha + 1)$. Να βρεθεί ο β.

7) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει ακέραιος α τέτοιος, ώστε $\dfrac{5\alpha - 8}{7} \in \mathbb{Z}$ και $\dfrac{5 - 3\alpha}{7} \in \mathbb{Z}$.

8) Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$ και $3 \not| \, \alpha$, να αποδειχθεί ότι

$$3/(\alpha^2 - 1)$$

9) Έστω α, β δύο ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 3. Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ διαιρείται με τον 3.

10) Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$ και $3/\alpha^3$, να αποδειχθεί ότι $3/\alpha$.

11) Αν ο α είναι άρτιος, να αποδειχθεί ότι $16/\alpha^2$ ή $16/(\alpha^2 - 4)$.

12) Αν ο ακέραιος α είναι πολλαπλάσιο του 8, αλλά όχι και του 16, να βρείτε το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον 16.

13) Να αποδειχθεί ότι:

i) $5/(3^{3\nu-1} + 2^{\nu+3})$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

ii) $11/(3^{2\nu} + 2^{6\nu-5})$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

14) Να αποδειχθεί ότι $17/(6 \cdot 5^{2\nu-1} + 2^{3\nu-1})$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

15) Να αποδειχθεί ότι το κλάσμα $\dfrac{2\nu + 1}{\nu^2 + \nu}$ είναι ανάγωγο για κάθε θετικό ακέραιο $\nu > 1$.

16) Να αποδειχθεί ότι το κλάσμα

$$\frac{15\alpha^2 + 8\alpha + 6}{30\alpha^2 + 21\alpha + 13}$$

είναι ανάγωγο για κάθε ακέραιο α.

17) Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί ν για τους οποίους ισχύει $(2\nu + 1)/(\nu^2 + \nu - 1)$.

18) Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ με $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Να αποδειχθεί ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \pi o\lambda 3$.

19) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ με $\alpha + \beta + \gamma = \pi o\lambda 6$, να αποδειχθεί ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \pi o\lambda 6$.

20) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ με $\alpha \neq \beta$ και $\nu, \mu \in \mathbb{N}^*$. Αν ν/μ, να αποδείξετε ότι $(\alpha^\nu - \beta^\nu)/(\alpha^\mu - \beta^\mu)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1) $a^3+2a+1=(4\lambda+1)^3+2(4\lambda+1)+1=$

$=(4\lambda)^3+3\cdot(4\lambda)^2+3\cdot 4\lambda+1+8\lambda+2+1=$

$=64\lambda^3+48\lambda^2+12\lambda+8\lambda+4=$

$=64\lambda^3+48\lambda^2+20\lambda+4=$

$=4(\underbrace{16\lambda^3+12\lambda^2+5\lambda+1}_{\mu})=4\cdot\mu,\ \mu\in\mathbb{N}$

Άρα, $4|a^3+2a+1$.

2) Έστω $a=2k$ και $\beta=2(k+1)$ δύο διαδοχικοί άρτιοι ακέραιοι

$a\cdot\beta=2k(2(k+1))=4k(k+1)$ (1)

οι $k, k+1$ είναι δυο διαδοχικοί ακέραιοι

Άρα, το γινόμενο τους $k(k+1)=2\lambda,\ \lambda\in\mathbb{Z}$ θα είναι ένας άρτιος αριθμός.

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται:

$a\cdot\beta=4\cdot(2\lambda)=8\cdot\lambda,\ \lambda\in\mathbb{Z}$

Άρα, το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακεραίων θα είναι πολλαπλάσιο του 8 (ή $8|a\cdot\beta$.)

3)

i) Έστω x, y άρτιοι

Άρα, $x=2k$ και $y=2\lambda,\ k,\lambda\in\mathbb{Z}$

Αλλά, $x\cdot y=2k\cdot 2\lambda=4k\lambda \Rightarrow 4|x\cdot y \Rightarrow 2|x\cdot y$ Άτοπο

ii) $2\nmid x\cdot y \Rightarrow 2\nmid y$ και $2\nmid x \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2k'+1$ και $y=2\lambda'+1,\ k',\lambda'\in\mathbb{Z}$

$x^2+y^2=(2k'+1)^2+(2\lambda'+1)^2=4k'^2+4\lambda'^2+4k'+4\lambda'+2=$

$=2\cdot(\underbrace{2k'^2+2\lambda'^2+2k'+2\lambda'+1}_{a})=2\cdot a,\ a\in\mathbb{Z}$

iii) $x^2+y^2=4(\underbrace{k'^2+\lambda'^2+k'+\lambda'}_{\beta})+2=4\beta+2,\ \beta\in\mathbb{Z}$

Άρα, το $4\nmid x^2+y^2$ (Διότι δίνει υπόλοιπο $2\neq 0$)

4) Από θεώρημα ευκλείδειας διαίρεσης

$\alpha = k_1 \gamma + \upsilon$ και $\beta = k_2 \gamma + \upsilon$, $0 \le \upsilon < |\gamma|$

Παίρνουμε τη διαφορά

$\alpha - \beta = k_1\gamma + \upsilon - (k_2\gamma + \upsilon) = k_1\gamma - k_2\gamma = (k_1 - k_2)\gamma$

Πολλαπλάσιο του $\gamma \Rightarrow \alpha - \beta$ διαιρείται από το γ.

και μάλιστα μονοσήμαντα.

5) $7 \mid (\alpha+3) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : \alpha + 3 = 7k \Rightarrow \alpha = 7k - 3$

$7 \mid (38 - \beta) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{Z}) : 38 - \beta = 7\lambda \Rightarrow \beta = 38 - 7\lambda$

$\alpha + \beta = (7k-3) + (38 - 7\lambda) = 35 + 7\underbrace{(k-\lambda)}_{\rho} = 35 + 7\rho, \ \rho \in \mathbb{Z}$

6) $\beta \mid (2\alpha+1)$ και $\beta \mid (3\alpha+1)$

Άρα, $\beta \mid [3(2\alpha+1) - 2(3\alpha+1)] = 6\alpha + 3 - 6\alpha - 2 = 1$

και λόγω ότι $\beta < 0$

αναγκαστικά $\beta = -1$.

7) Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{Z}$, ώστε:

$\frac{5\alpha - 8}{7} \in \mathbb{Z}$ και $\frac{5 - 3\alpha}{7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7 \mid (5\alpha - 8)$ και $7 \mid (-3\alpha + 5)$

Άρα, $7 \mid [3(5\alpha - 8) + 5(-3\alpha + 5)] = 1$ Άτοπο.

8) $3 \nmid \alpha \Rightarrow \alpha = 3k + \upsilon$, $k \in \mathbb{Z}$ και $0 < \upsilon < 3$

Άρα, $\upsilon = 1$ ή $\upsilon = 2$

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις ισχύει: $3 \mid (\alpha^2 - 1)$

- Αν $\upsilon = 1$, $\alpha = 3k + 1$

  Επομένως, $\alpha^2 - 1 = (3k+1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + \cancel{1} - \cancel{1} = 3(3k^2 + 2k)$

- Αν $\upsilon = 2$, $\alpha = 3k + 2$

  Επομένως, $\alpha^2 - 1 = (3k+2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1 = 3(3k^2 + 4k + 1)$.

9) $3 \nmid \alpha \Rightarrow \alpha = 3k_1 + 1$ (1) ή $\alpha = 3k_1 + 2$ (2), $k_1 \in \mathbb{Z}$

$3 \nmid \beta \Rightarrow \beta = 3k_2 + 1$ (3) ή $\beta = 3k_2 + 2$ (4), $k_2 \in \mathbb{Z}$

(1), (3): $\alpha + \beta = (3k_1 + 1) + (3k_2 + 1) = 3(k_1 + k_2) + 2 \Rightarrow 3 \nmid \alpha + \beta$

(1), (4): $\alpha + \beta = (3k_1 + 1) + (3k_2 + 2) = 3(k_1 + k_2 + 1) \Rightarrow 3 \mid \alpha + \beta$.

(2), (4): $\alpha + \beta = (3k_1 + 2) + (3k_2 + 2) = 3(k_1 + k_2) + 4 \Rightarrow 3 \nmid \alpha + \beta$

(2), (3): $\alpha + \beta = (3k_1 + 2) + (3k_2 + 1) = 3(k_1 + k_2 + 1) \Rightarrow 3 \mid \alpha + \beta$

10) Έστω $\alpha = 3k + \upsilon$, $k \in \mathbb{Z}$ $0 \le \upsilon < 3$, $\upsilon \in \mathbb{Z}$

Επομένως, $\alpha^3 = (3k + \upsilon)^3 = (3k)^3 + 3 \cdot (3k)^2 \cdot \upsilon + 3 \cdot 3k\upsilon^2 + \upsilon^3 =$

$= 3 \cdot \underbrace{(9k^2 + 9k^2 \cdot \upsilon + 3k\upsilon^2)}_{\lambda \in \mathbb{Z}} + \upsilon^3 = 3\lambda + \upsilon^3$

Αλλά, $3 \mid \alpha^3$ και $3 \mid 3\lambda \Rightarrow 3 \mid \upsilon^3$

Ενώ, $\upsilon = 0$ ή $\upsilon = 1$ ή $\upsilon = 2$

- Για $\upsilon = 0$, τότε $3 \mid 0^3 \Rightarrow 3 \mid 0$ Ισχύει
- Για $\upsilon = 1$, τότε $3 \mid 1^3 \Rightarrow 3 \mid 1$ Αδύνατο
- Για $\upsilon = 2$, τότε $3 \mid 2^3 \Rightarrow 3 \mid 8$ Αδύνατο

Άρα, αναγκαστικά $\upsilon = 0 \Rightarrow \alpha = 3k \Rightarrow 3 \mid \alpha$.

11) α άρτιος $\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : \alpha = 2k$

- Αν k άρτιος, τότε $k = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$
  και έτσι $\alpha^2 = (2k)^2 = (4\lambda)^2 = 16\lambda^2 \Rightarrow 16 \mid \alpha^2$
- Αν k περιττός, τότε $k = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$
  και έτσι $\alpha^2 = (2k)^2 = (2(2\lambda + 1))^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4$
  οπότε, $\alpha^2 - 4 = 16(k^2 + k) \Rightarrow 16 \mid \alpha^2 - 4$.

12) α πολ/σιο του 8 $\Leftrightarrow 8|\alpha \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}): \alpha = 8k_1$

α <u>όχι</u> πολ/σιο του 16 $\Leftrightarrow 16\nmid\alpha \Leftrightarrow \alpha = 16k_2 + \upsilon$, $k_2, \upsilon \in \mathbb{Z}$, $0<\upsilon<16$

Άρα, $8k_1 = 16k_2 + \upsilon \Rightarrow \upsilon = 8(\lambda - 2k) \Rightarrow 8|\upsilon$

Αλλά, $0<\upsilon<16$. Επομένως, αναγκαστικά το $\upsilon = 8$

13) i) Έστω το ζητούμενο, η πρόταση $P(\nu)$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$

Μέσω μαθηματικής επαγωγής:

- Η πρόταση $P(1)$ αληθής (αφού $5|(3^2+2^4)=9+16=25$)
- Έστω ότι η πρόταση $P(k)$ αληθής και θδο η πρόταση $P(k+1)$ αληθής

Δηλαδή, ισχύει: $5|(3^{3k-1}+2^{k+3}) \Leftrightarrow (\exists \lambda\in\mathbb{Z}): 3^{3k-1}+2^{k+3}=5\lambda$

$\Leftrightarrow 3^{3k-1} = 5\lambda - 2^{k+3}$ (1)

Αλλά,

$$3^{3k-2}+2^{k+4} = 3^{3k-1}\cdot 3^{-1} + 2^{k+3}\cdot 2 =$$
$$= (5\lambda - 2^{k+3})\frac{1}{3} + 2^{k+3}\cdot 2 =$$
$$= \frac{5}{3}\cdot\lambda - \frac{1}{3}\cdot 2^{k+3} + 2\cdot 2^{k+3} =$$
$$= \frac{5}{3}\lambda - \frac{5}{3}\cdot 2^{k+3} = 5\cdot\left(\frac{\lambda}{3} - \frac{1}{3}\cdot 2^{k+3}\right)$$

Δηλαδή, $5|3^{3k-2}+2^{k+4}$

Άρα, η πρόταση $P(\nu)$ αληθής $\forall \nu\in\mathbb{N}$

ii) Όμοια μέσω επαγωγής.

14) ΟΜΟΙΑ ΜΕ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ (13).

15) Έστω ότι το κλάσμα δεν είναι ανάγωγο

άρα, $(\exists \beta \in \mathbb{Z})$, με $|\beta|>1$ ώστε $\beta \mid (2\nu+1)$ και

$\beta \mid (\nu^2+\nu)$. Άρα, από γνωστή ιδιότητα της

διαιρετότητας:

$\beta \mid [2(\nu^2+\nu)-\nu(2\nu+1)] = \nu \Rightarrow \beta \mid \nu$

Άρα, $\beta \mid \nu$ και $\beta \mid (2\nu+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta \mid [(2\nu+1)-2\cdot\nu] = 1 \Rightarrow \beta \mid 1 \Rightarrow |\beta| = 1$ Άτοπο (αφού $|\beta|>1$)

Επομένως το κλάσμα είναι ανάγωγο

16) Έστω ότι το κλάσμα δεν είναι ανάγωγο

άρα, $(\exists \beta \in \mathbb{Z})$, με $|\beta|>1$ ώστε $\beta \mid (15a^2+8a+6)$ και

$\beta \mid (30a^2+21a+13)$. Άρα, από γνωστή ιδιότητα της

διαιρετότητας:

$\beta \mid [(30\cdot a^2+21a+13)-2(15a^2+8a+6)] = 5a+1$

Άρα, $\beta \mid (5a+1)$ και $\beta \mid (15a^2+8a+6) \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta \mid [(15a^2+8a+6)-3a(5a+1)] = 5a+6$

Άρα, $\beta \mid (5a+6)$ και $\beta \mid (5a+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta \mid [(5a+6)-(5a+1)] = 5 \Rightarrow \beta \mid 5$

τέλος, βλέπουμε ότι:

$\beta \mid 5$ και $\beta \mid (5a+1) \Rightarrow \beta \mid [(5a+1)-5a] = 1 \Rightarrow |\beta| = 1$

Άρα, το αρχικό μας κλάσμα είναι ανάγωγο. Άτοπο.

17) $\left.\begin{cases} (2\nu+1) \mid (\nu^2+\nu-1) \\ (2\nu+1) \mid (2\nu+1) \end{cases}\right| \Rightarrow (2\nu+1) \mid [\nu(2\nu-1)-(\nu^2+\nu-1)] = \nu^2+1$

Άρα,

$\left.\begin{cases} (2\nu+1) \mid (\nu^2+\nu-1) \\ (2\nu+1) \mid (\nu^2+1) \end{cases}\right| \Rightarrow (2\nu+1) \mid [(\nu^2+\nu-1)-(\nu^2+1)] = \nu-2$

Άρα,

$\left.\begin{cases} (2\nu+1) \mid (\nu-2) \\ (2\nu+1) \mid (2\nu+1) \end{cases}\right| \Rightarrow (2\nu+1) \mid [(2\nu+1)-2(\nu-2)] = 5$

οπότε $2\nu+1=5$ ή $2\nu+1=1 \Rightarrow \nu=0$ ή $\nu=2$

- Για $\nu=0 \rightsquigarrow (2\nu+1) \mid (\nu^2+\nu-1) \Rightarrow 1 \mid -1$ ισχύει
- Για $\nu=2 \rightsquigarrow (2\nu+1) \mid (\nu^2+\nu-1) \Rightarrow 5 \mid 5$ ισχύει

Άρα, δεκτές και οι δυο τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$

18) $\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-\gamma \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^3=-\gamma^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\gamma^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta(-\gamma)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ πολλαπλάσιο του 3.

19) $\alpha+\beta+\gamma=6\cdot k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha+\beta=6k-\gamma,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^3=(6k-\gamma)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(6k)^3-3\cdot(6k)^2\gamma+3\cdot(6k)\gamma^2-\gamma^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=6\cdot(36k^2-18k^2\gamma+3k\gamma^2)-\gamma^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta\cdot(6k-\gamma)+\gamma^3=6\cdot(36k^2-18k^2\gamma+3k\gamma^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=6(36k^2-18k^2\gamma+3k\gamma^2)-3\alpha\beta\cdot 6k+3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=6(36k^2-18k^2\gamma+3k\gamma^2-3\alpha\beta k)+3\alpha\beta\gamma$ (2)

Λόγω ότι $\alpha+\beta+\gamma=6k$, $k\in\mathbb{Z}$

Δηλαδή $\alpha+\beta+\gamma=2\lambda$, $\lambda=3k\in\mathbb{Z}$

Επομένως το $\alpha+\beta+\gamma$ πολλ/σιο του 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ τουλάχιστον ένας από τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$

είναι άρτιος, οπότε $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=2\cdot\mu$, $\mu\in\mathbb{Z}$

Άρα, η σχέση (2) γίνεται

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=6\cdot(36k^3-18k^2\cdot\gamma+3k\gamma^2-3\alpha\beta k)+6\mu=$$

$$=6(36k^3-18k^2\cdot\gamma+3k\gamma^2-3\alpha\beta k+\mu)\Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ πολλ/σιο του 6.

20) $\nu|\mu \Rightarrow \mu=k\cdot\nu$, $k\in\mathbb{N}^*$

$$\alpha^\mu-\beta^\mu=\alpha^{k\nu}-\beta^{k\nu}=(\alpha^\nu)^k-(\beta^\nu)^k=$$

$$=(\alpha^\nu-\beta^\nu)\cdot\underbrace{\left((\alpha^\nu)^{k-1}+(\alpha^\nu)^{k-2}\cdot\beta^\nu+\ldots+(\beta^\nu)^{k-1}\right)}_{\rho\in\mathbb{N}}=\rho\cdot(\alpha^\nu-\beta^\nu)$$

Δηλ. $\alpha^\mu-\beta^\mu$ πολλ/σιο του $\alpha^\nu-\beta^\nu \Rightarrow (\alpha^\nu-\beta^\nu)\,|\,(\alpha^\mu-\beta^\mu)$.

$\forall \mu,\nu\in\mathbb{N}^*$